Rovnice

$$\underbrace{2x + 7}_{\text{(levá strana)}} = \underbrace{3x - 15}_{\text{(pravá strana)}}$$

$$5(d-2)-2(3d-7)=2(2d-3)$$
$$5d-10-6d+14=4d-6$$
$$-d+4=4d-6 \quad /-4d-4$$
$$-d-4d=-6-4$$
$$-5d=-10 \quad /\cdot(-1)$$
$$5d=10 \quad /:5$$
$$\boldsymbol{d=2}$$

Zkouška:

$L=5(2-2)-2(3\cdot2-7)=5\cdot0-2\cdot(6-7)=-2\cdot(-1)=2$

$P=2(2\cdot2-3)=2(4-3)=2\cdot1=2$

$L=P$

$\mathbf{K}=\{2\}$

Rovnicí rozumíme rovnost dvou výrazů, z nichž alespoň v jednom je nějaká proměnná (písmenko). Tuto proměnnou pak nazýváme **neznámou** dané rovnice a snažíme se přijít na její konkrétní číselnou hodnotu, pro kterou je daná rovnost splněna. Této konkrétní hodnotě pak říkáme **kořen rovnice**. Rovnice má dvě strany – levou L a pravou P.

Po zjištění potenciálního kořene rovnice pak tzv. **zkouškou** ověříme, že tento kořen skutečně vyhovuje. To provádíme tak, že domnělý kořen (číslo) dosadíme do levé strany rovnice a zjistíme hodnotu výrazu v levé straně rovnice. Poté provedeme totéž pro pravou stranu rovnice. Pokud se hodnoty výrazů levé i pravé strany rovnice shodují ($L = P$), je kořen skutečně správný.

Řešení rovnic

Rovnici je užitečné představit si jako rovnoramenné váhy, které jsou v rovnováze. Pokud něco přidáme (odebereme) z jedné misky těchto vah, je nutné provést totéž i na druhé misce, jinak by se rovnováha porušila. Obecně je tedy změna na jedné straně rovnice nutně provázena změnou i druhé strany rovnice.

Při řešení rovnic používáme tzv. **ekvivalentní úpravy**. Jde o takové úpravy obou stran rovnice, které nemění hodnotu kořene ani množinu kořenů této rovnice. Ukažme si na několika příkladech, co s rovnicí dělat bez následků nemůžeme:

- násobit (nebo dělit) **nulou**:

$$2x + 3 = 7$$

Kořenem této rovnice je jistě číslo 2. Pokud ale obě strany vynásobíme číslem 0, vyjde nám:

$$0 = 0$$

Což (jak se dozvíme později) znamená, že rovnice má nekonečně mnoho řešení. Neboli že za neznámou x můžeme dosadit libovolné číslo. To ale zjevně není pravda.

- odmocňovat (umocňovat):

$$x^2 = 9$$

Aby rovnost platila, můžeme za x dosadit číslo 3, ale také -3, protože $(-3)^2 = 9$. Pokud však rovnici odmocníme, dostaneme:

$$x = 3$$

A tedy ztrácíme jeden z kořenů původní rovnice.

$$\frac{5-x}{2}-\left(\frac{x+7}{5}-\frac{x+1}{4}\right)=\frac{12-x}{3}-\left(\frac{x-1}{2}+\frac{x+3}{3}\right)$$
$$\frac{5-x}{2}-\frac{x+7}{5}+\frac{x+1}{4}=\frac{12-x}{3}-\frac{x-1}{2}-\frac{x+3}{3} \qquad / \cdot 60$$
$$30(5-x)-12(x+7)+15(x+1)=20(12-x)-30(x-1)-20(x+3)$$
$$150-30x-12x-84+15x+15=240-20x-30x+30-20x-60$$
$$-27x+81=-70x+210$$
$$43x=129 \qquad /:43$$
$$x=3$$

Řešte v R rovnici: $3(x-2)-4x=2-(1+x)$

$$3x-6-4x=2-1-x$$
$$-x-6=1-x \qquad /+6$$
$$-x=7-x \qquad /+x$$
$$0x=7$$

Nenajdeme žádné takové číslo, které po vynásobení nulou bude rovno sedmi.
Množina kořenů je tedy prázdná.

$$K=\emptyset$$

**Řešením je prázdná množina,
tedy rovnice nemá řešení!**

Ekvivalentní úpravy

Ekvivalentní úpravy jsou následující:

- přičíst (odečíst) číslo, neznámou nebo výraz k oběma stranám rovnice;
- vynásobit (vydělit) **nenulovým** číslem obě strany rovnice;
- zaměnit levou a pravou stranu rovnice.

Množina řešení

Rovnice, které mají neznámou pouze v první mocnině, nazýváme **lineární rovnice** (odvozeno z latinského slova „linea“ – přímka, rovná čára). To má původ v geometrii. Tyto rovnice jsou totiž matematickým vyjádřením přímky v rovině. Pro vzájemnou polohu dvou přímek v rovině (levá strana rovnice je jedna přímka, pravá strana rovnice je druhá přímka) máme 3 následující možnosti:

1) přímky jsou **různoběžné**, tím pádem mají jeden společný bod a řešením rovnice tedy bude **jedno konkrétní číslo**, pro které nám vyjde $L = P$.

   Rovnice bude po úpravách vypadat třeba takto: $x = -\frac{3}{4}$, nebo třeba $x = 5$;

2) přímky jsou **rovnoběžné**, tím pádem nemají žádný společný bod a **množina řešení je prázdná**. Což znamená, že nenajdeme žádné číslo, pro které by bylo splněno $L = P$.

   Rovnice bude po úpravách vypadat třeba takto: $0 = 7$, nebo třeba $2 = -3$;

3) přímky jsou **totožné**, tím pádem mají společné všechny body. Což znamená, že do rovnice můžeme dosadit **jakékoliv číslo** a dostaneme pravdivou rovnost $L = P$.

   Rovnice bude po úpravách vypadat třeba takto: $0 = 0$, nebo třeba $-\frac{5}{3} = -\frac{5}{3}$.

Bystrý čtenář se nyní jistě zamýšlí, jak postupovat při zkoušce rovnice v případech 2) a 3). V případě 2) máme skutečně problém a nezbývá než věřit, že jsme v postupu řešení rovnice neudělali chybu. V případě 3) ale možnost ověření máme. Stačí dosadit do zkoušky rovnice dvě různá čísla (tedy provést dvě různé oddělené zkoušky) a pokud je rovnost $L = P$ splněna pro námi zvolená dvě různá čísla, je již nutně splněna pro všechna čísla (dvě přímky se v rovině nemohou protínat jen ve dvou bodech, ale už nutně musí být totožné).

Pro názornou ukázku a zopakování výše uvedených pojmů doporučuji video:

https://www.youtube.com/watch?v=iL6awqCDvEU